

2005 福島 7 難易度(1)★★★ (2)★★★★ (3)★★★★★

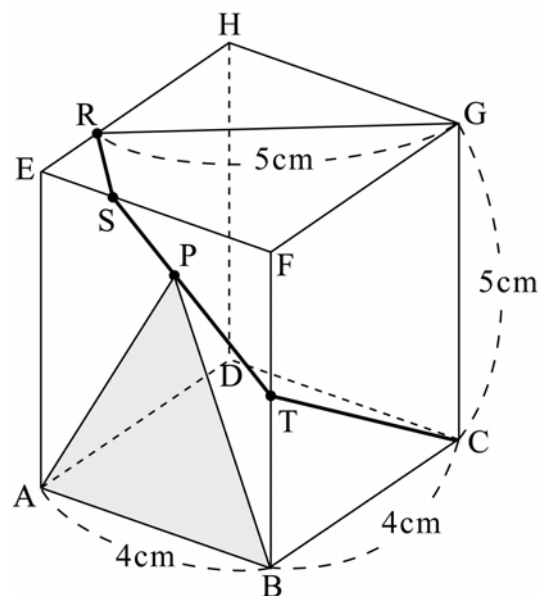
7 右の図のように、底面が1辺4cmの正方形で、高さが5cmの直方体がある。この直方体の辺EH上に $GR=5\text{cm}$ となるように点Rをとる。

Rから直方体の面に沿って、辺EFと辺BFに交わるようにして頂点Cまで最短で結ぶ線をひき、ひいた線がEFと交わる点をS、BFと交わる点をTとする。

また、点Pは、このようにしてRからCまでひいた線上にある点とする。

このとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) ARの長さを求めなさい。



(2) 点PがSTの中点であるとき、 $\triangle ABP$ の面積を求めなさい。

(3) $\triangle ABP$ の面積が最小になるように点Pをとるとき、APの長さを求めなさい。

【解答】

7

- (1) $\sqrt{26}$ cm
 (2) 8cm^2
 (3) $\frac{4\sqrt{34}}{5}$ cm

【解説】

- (1) $\triangle GHR$ に注目します。 $\angle GHR$ が直角で、 $GR=5\text{cm}$ 、 $HG=4\text{cm}$ なので、 $HR=3\text{cm}$ 。 よって $RE=1\text{cm}$ 。
 次に $\triangle AER$ に注目。 AR は三平方の定理を使って求めることができます。

- (2) 問題文に「最短で結ぶ線」とあるので、分かりやすくするために立体を平面に展開して、直線で結びます。

ここからは、ひとつずつ右の図に書き込んでいってください。

$RE=1\text{cm}$ 、 $AE=5\text{cm}$ ですから、 $RA=6\text{cm}$ 。

$AB=BC=4\text{cm}$ ですから、 $AC=8\text{cm}$ 。

$\angle A$ が直角なので、 $\triangle CAR$ は辺の比が $3:4:5$ の直角三角形であることが分かります。

そして、 $\triangle CAR$ と相似な三角形が3つ見つかります。 $\triangle SER$ 、 $\triangle SFT$ 、 $\triangle CBT$ です。「2組の角がそれぞれ等しい」という相似条件が成り立ちます。

$\triangle CBT$ に注目します。 $BC=4\text{cm}$ が分かっています。 辺の比は $3:4:5$ ですから、 $BT=3\text{cm}$ となります。 $FB=5\text{cm}$ ですから、 $FT=2\text{cm}$ 。

点 P は ST の中点です(中点 P をかき込んでください)。

点 P から SF に向かって垂線を引き、 SF とぶつかったところを U とします。

$\triangle SFT$ で、中点連結定理が成り立ちますから、 $SU=1\text{cm}$ です。

ということは、点 P から AB に下ろした垂線の長さ(つまり $\triangle ABP$ の高さ)は 4cm であることが分かります。

これで、 $\triangle ABP$ の面積を求めることができます。

- (3) $\triangle ABP$ の面積が最小になるのは点 P が TC 上にあるときです。

点 P が TC 上にあるとき、 $\triangle ABP$ の $\angle ABP$ は 90° となります。

つまり、 AB を底辺として高さ BP の長さが最小になるときを考えればよいことになります。

BP が最小になるのは、点 B から TC に垂線をおろしたときです。このとき、 $\triangle CPB$ は $\triangle CBT$ と相似になります。 辺の比は $3:4:5$ です。 $BC=4\text{cm}$ ですから、 BP は辺の比より $BP:4=3:5$ で、 $BP=\frac{12}{5}$

AP は $\triangle ABP$ に注目して、三平方の定理を使って求めることができます。

