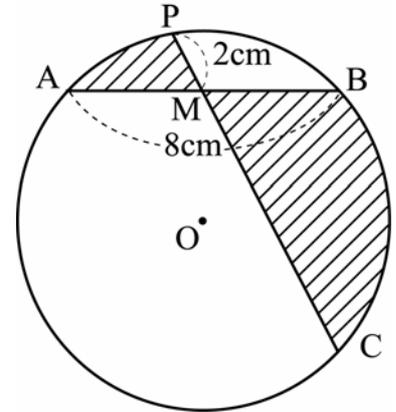


2005 宮城 B5 (3) 難易度★★★★★

5

(3)[一部改変] 図Ⅱのように、長さが  $8\text{cm}$  の線分  $AB$  があり、その中点を  $M$  とします。線分  $AB$  上にない点  $P$  を  $PM=2\text{cm}$  になるようにとり、3点  $A$ 、 $B$ 、 $P$  を通る円を  $O$  とし、直線  $PM$  と円  $O$  との交点のうち  $P$  以外の点を  $C$  とします。 $\angle PMA=60^\circ$  のとき、斜線部分の面積を求めなさい。  
ただし、円周率は  $\pi$  とし、弧  $AP$ 、弧  $BC$  はともに小さい方の弧とします。

図Ⅱ



【解答】

5

$$(3) \quad \frac{28}{3}\pi - 3\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

【解説】

この問題は非常に難しかったです。

解き方を大まかに説明すると、

まず、 $\triangle MBC$  で  $\angle BMC = 60^\circ$ 、 $MB : MC = 2 : 1$  なので、 $\triangle MBC$  は直角三角形と分かります。

$\angle MBC = 90^\circ$  です。

同様に、 $\triangle APM$  も  $\angle APM = 90^\circ$  の直角三角形です。

$\angle ABC = 90^\circ$  ということになりますから、 $AC$  は円  $O$  の直径であることが分かります。

線部分のうち  $\triangle APM$  (これも直角三角形) と  $\triangle MBC$  の面積は求まります。

問題はここからです。

弧  $AP$  と弦  $AP$  で囲まれた弓形の図形と弧  $BC$  と弦  $BC$  で囲まれた弓形の図形の面積が出ないのです。面積を出すために必要な扇形  $APO$  と扇形  $BCO$  の中心角がどうしても出せません。

そこで、ちょっと考え方を変えます。

その前に、説明を分かりやすくするために、

弧  $AP$  と弦  $AP$  で囲まれた弓形の図形の面積を①、

弧  $BC$  と弦  $BC$  で囲まれた弓形の図形の面積を②とします。

①+②は、半円から、 $\triangle AOP$  と  $\triangle BOC$  と扇形  $POB$  を引いたものなのです。

そして、それぞれの面積は出すことができます。

複雑な計算を経て、めでたく正解にいたるわけです。

これは本当に難しかったです。

中学生で分かる人もいるんだろうなあ。

思わず尊敬してしまいます。

#### ※(2008.3.19 追記)

「中心角がどうしても出せません。」とありますが、実際には中心角を求めることができます。

弦  $AP$  と弦  $BC$  の長さの比が  $1 : 2$  であることと、 $\angle POB = 60^\circ$  であることから、 $\angle AOP = 40^\circ$ 、 $\angle BOC = 80^\circ$  と求めることができます。(端山さま、ご指摘ありがとうございました。)

#### ※さらに追記(2008.3.25)

上の追記は間違いです。弧の長さとは中心角は比例しますが、弦の長さは比例しません。(端山さま、ご指摘ありがとうございました。)